FUNGSI BANTU NONPARAMETRIK BARU UNTUK MENYELESAIKAN OPTIMASI GLOBAL

Ridwan Pandiya #1), **Emi Iryanti** #2)

#*S1 Informatika, Fakultas Teknologi Industri dan Informatika, Insitut Teknologi Telkom*
Jl. D.I Panjaitan No. 128, Purwokerto
1)ridwanpandiya@ittelkom-pwt.ac.id
2)emi_iryanti@ittelkom-pwt.ac.id

Abstract—**Manuskrip ini menyajikan dua hal, yang pertama adalah sebuah fungsi pengisian (filled function) dan yang kedua adalah sebuah algoritma. Fungsi pengisian ini dilibatkan dalam algoritma untuk menyelesaikan persoalan optimasi global dimana fungsi objektifnya kontinu. Fungsi pengisian ini tidak mengandung unsur eksponen, logaritma, maupun trigonometri sehingga proses untuk mendapatkan nilai minimum global menjadi lebih sederhana. Disamping itu, fungsi pengisian yang diberikan dalam manuskrip ini berbeda dengan fungsi-fungsi pengisian lain yang ada dalam literatur-literatur sebelumnya karena tidak melibatkan parameter apapun. Algoritma yang dibangun kemudian diterapkan pada beberapa contoh yang biasa digunakan dalam optimasi global untuk menguji apakah fungsi pengisian bekerja dengan baik. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa fungsi pengisian tanpa parameter mampu secara efektif mendapatkan nilai minimum global untuk semua contoh yang diberikan..**

Keywords—**Optimasi global, fungsi bantu tanpa parameter, nilai minimum global, fungsi pengisian**

I. PENDAHULUAN

Kemajuan di bidang ilmu komputer saat ini membawa banyak kemudahan terhadap bidang ilmu teknik, ekonomi, manajemen, keuangan, bahkan ilmu sosial, dan bidang ilmu lain untuk dapat memodelkan permasalahan yang akan diselesaikan. Tak jarang model yang dibangun adalah model optimasi global. Berdasar pada kenyataan tersebut, metode-metode optimasi khususnya optimasi global mutlak diperlukan. Pada dasarnya pendekatan untuk menyelesaikan masalah optimasi terbagi menjadi dua jenis yaitu pendekatan stokastik dan deterministik. Contoh metode-metode yang menggunakan pendekatan stokastik adalah algoritma genetika [1], [2], *simulated annealing method* [3], tabu *search* [4], [5]. Sedangkan metode yang termasuk ke dalam pendekatan deterministik adalah metode Lagrange [6], metode *branch and bound* [7], metode *dynamic programming* [8], metode *filled function* (fungsi pengisian).

Pendekatan stokastik banyak diterapkan karena dianggap pendekatan yang cukup efektif [9], meskipun tidak ada jaminan akan didapatkannya nilai minimum global karena pendekatan ini bertumpu pada banyaknya titik awal yang dibangun secara acak. Diantara metode-metode yang termasuk ke dalam pendekatan deterministik yang telah disebutkan sebelumnya, metode *filled function* merupakan metode yang efektif dan mudah untuk diaplikasikan kepada persoalan optimasi global baik untuk fungsi objektif yang kontinu maupun diskrit dan atau yang diferensiabel maupun tidak diferensiabel [10].

Metode *filled function* pertama kali diperkenalkan oleh R.P. Gee sekitar tahun 80-an dalam sebuah Seminar Internasional namun baru dipublikasikan pada tahun 1990 dalam [11]. Karya lain yang merupakan perbaikan *filled function* tersebut dipublikasikan dalam [12] Dalam manuskripnya, Gee memberikan definisi dari *filled function* serta *filled function* itu sendiri yang akan menjadi awal perkembangan metode ini. Definisi di bawah ini merupakan *filled function* yang pertama kali dibuat oleh Gee.

Definisi

Misalkan x_1^* adalah sebuah titik minimum dari fungsi $f(x)$. $P(x)$ disebut sebagai filled function dari $f(x)$ di x_1^* jika memenuhi:

1. x_1^* adalah titik maksimum dari $P(x)$ dan semua cekungan B_1^* dari $f(x)$ di x_1^* menjadi bagian cembung dari $P(x)$.
2. $P(x)$ tidak memiliki titik minimum atau titik pelana di cekungan $f(x)$ yang lebih tinggi dari B_1^*.
3. Jika $f(x)$ memiliki cekungan yang lebih rendah dari B_1^*, maka akan ada sebuah titik x' yang meminimumkan $P(x)$ dalam garis yang melalui x dan x_1^*.

Filled function yang diberikan dalam [11] dapat dilihat dalam persamaan (1.1)

$$P(x,r,\rho) = \frac{1}{r+f(x)}\exp\left(-\frac{\left\|x-x_1^*\right\|^2}{\rho}\right), \qquad 1.1$$

dengan r dan ρ merupakan dua parameter. Namun pada perkembangannya kedua parameter tersebut sulit untuk ditentukan [12]. Karena alasan sulitnya mendapatkan nilai kedua parameter tersebutlah maka Gee dan Qin memperbaiki filled function tersebut dengan membuat filled function baru dalam [12] hanya dengan melibatkan satu parameter yaitu:

$$Q(x,x_1^*,A) = -[f(x)-f(x_1^*)]\exp\left(-A\left\|x-x_1^*\right\|^2\right) \qquad 1.2$$

Kedua filled function tersebut telah banyak menginspirasi banyak peneliti yang memiliki ketertarikan dalam mengkaji global optimasi dengan metode filled function ini. Hal ini terbukti dengan semakin banyaknya filled function-filled function baru yang dibuat yang tujuannya untuk memperbaiki kelemahan filled function milik Gee terutama karena filled function tersebut melibatkan unsur eksponen. Lin et al. dalam [13] menggagas filled function dengan dua parameter namun menggunakan fungsi arctan dalam filled function-nya. Fungsi arctan digunakan untuk mempermudah proses meminimumkan filled function. Sedangkan Ling & Xu dalam [14] masih menggunakan unsur logaritma hanya saja digunakan untuk menyelesaikan optimasi diskrit terutama dalam persoalan *large scale max-cut*, dan masih banyak filled function dengan dua parameter yang berhasil dipublikasikan tentu dengan kekurangan dan kelebihannya seperti dapat dibaca dalam [15], [16], dan [17]. Filled function dengan satu parameter dapat dibaca dalam [18], [19], dan [20].

Secara umum ada tiga tahap utama yang diperlukan untuk menyelesaikan optimasi global dengan menggunakan filled function, diantaranya adalah:

1. Meminimumkan fungsi objektif $f(x)$ dengan metode sebarang metode peminimuman fungsi tergantung fungsi objektifnya. Contohnya metode Newton, metode trust region, metode conjugate gradient, metode Quasi-Newton, metode Steepest Descent, dan lain sebagainya. Dalam tahap ini akan didapatkan titik minimum lokal dari $f(x)$ yaitu x^*.
2. Setelah x^* didapatkan pada tahap pertama, langkah selanjutnya adalah membangun filled function kemudian meminimumkan filled function tersebut dengan menggunakan titik minimum lokal yang telah didapatkan sebagai titik awal. Tahap ini merupakan tahap yang sangat penting sebab masalah utama dalam menyelesaikan optimasi global pada dasarnya adalah bagaimana melewati cekungan atau bagian cembung dari fungsi objektif jika telah berada pada titik minimum lokal. Tahap ini akan menghasilkan sebuah titik x' dimana $f(x') \le f(x^*)$.
3. Titik x' pada tahap kedua akan digunakan sebagai titik awal untuk meminimumkan kembali $f(x)$ sehingga akan didapatkan nilai minimum yang lebih kecil dari $f(x^*)$.

Ketiga tahap di atas dilakukan secara berulang hingga proses berhenti jika kriteria berhenti terpenuhi.

Proses komputasi sering terganggu apabila nilai parameter filled function pada iterasi tertentu berbeda dengan nilai parameter yang telah ditentukan di awal, sehingga filled function yang ada pada literatur-literatur yang telah disebutkan sebelumnya menjadi kurang efektif karena akan membutuhkan waktu yang tidak sedikit dalam menentukan parameter yang sesuai. Berbekal fakta tersebut, maka beberapa filled function yang tidak melibatkan parameter dibuat. Ma et al. [21] dalam penelitiannya berhasil membangun sebuah filled function tanpa parameter dimana fungsi tersebut melibatkan fungsi arctan yang dimaksudkan sebagai pengganti fungsi eksponen yang biasa digunakan banyak filled function. Filled function tanpa parameter lain yang ada hingga saat ini dapat dilihat dalam [22], [23], dan [24].

Definisi serta *filled function* $F(x,x^*)$ diberikan dalam manuskrip ini. Beberapa sifat dari $F(x,x^*)$ juga diberikan beserta bukti formalnya. Untuk membuktikan keunggulan dari $F(x,x^*)$, akan dibangun algoritma yang kemudian akan diimplementasikan menjadi sebuah program komputer dengan menggunakan bahasa pemrograman C++. Fungsi objektif yang digunakan sebagai eksperimen dalam penelitian ini adalah fungsi-fungsi satu peubah yang diambil dari beberapa literatur sebagai *benchmark function*.

Manuskrip ini terbagi menjadi menjadi 5 bagian. Bagian 2 berisi dasar teori yang akan digunakan dalam penelitian ini beserta asumsi-asumsi agar fokus penelitian ini lebih jelas. *Filled function* tanpa parameter dan definisinya akan diberikan dalam bagian 3. Algoritma dan implementasinya terhadap fungsi *benchmark* akan ditulis dalam bagian 4. Sedangkan kesimpulan akan diberikan dalam bagian 5.

II. Dasar Teori

Masalah optimasi global yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\min \{f(x) : x \in X \subset R\}, \quad 1.3$$

dengan $f : R \to R,\ X \subset R$ adalah fungsi yang tertutup dan terbatas yang mengandung semua titik minimum global $f(x)$ di dalam interiornya. Dalam penelitian ini juga ditetapkan asumsi-asumsi seperti dapat dilihat dalam asumsi 1 sampai asumsi 3.

Asumsi 1

Fungsi objektif $f(x)$ merupakan fungsi yang kontinu dan diferensiabel di R.

Asumsi 2

Titik minimum dari $f(x)$ bisa tidak terhingga akan tetapi titik minimum yang memiliki nilai yang berbeda terhingga.

Asumsi 3

$f(x)$ besifat coercive yaitu $f(x)$ akan bernilai positif tak hingga ($f(x) \to +\infty$) jika norma x dibuat mendekati positif tak hingga ($\|x\| \to +\infty$).

Selain asumsi-asumsi di atas, dalam bagian ini juga diberikan beberapa definisi, teorema dan lema yang berkaitan dan digunakan dalam penelitian ini. Untuk bukti lema dan teorema tidak akan dibuktikan karena telah banyak dibahas dalam literatur.

Definisi 1

Titik $x^* \in X$ dikatakan sebagai titik minimum global dari masalah (1.3) jika $f(x^*) \le f(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Definisi 2

Titik $x^* \in X$ dikatakan sebagai titik minimum lokal dari fungsi $f : R \to R,\ X \subset R$ jika $f(x^*) \le f(x)$ untuk setiap $x \in N(x^*)$.

Definisi 3

Titik $x^* \in X$ dikatakan sebagai titik minimum lokal sempurna dari fungsi $f : R \to R,\ X \subset R$ jika $f(x^*) < f(x)$ untuk setiap $x \in N(x^*) \setminus \{x^*\}$.

Penelitian ini akan menggunakan definisi yang sebelumnya digunakan dalam [21].

III. Fungsi Bantu Nonparametrik Baru

Perhatikan fungsi pengisian nonparametrik baru di bawah ini:

$$P(x, x^*) = -\eta(f(x) - f(x^*))\|x - x^*\|, \quad 1.4$$

$$\text{dimana } \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{jika } t > 0 \\ -1, & \text{jika } t \le 0 \end{cases}$$

dan x^* merupakan titik minimum lokal dari $f(x)$. Sama dengan literatur [21], tiga teorema di bawah ini menunjukkan bahwa $P(x, x^*)$ merupakan fungsi pengisian.

Teorema 1

Titik minimum kuat (*strictly local minimizer*) dari $f(x)$ yaitu x^* merupakan titik maksimum global dari $P(x, x^*)$.

<u>Bukti</u>

Karena x^* merupakan titik minimum lokal $f(x)$ maka terdapat suatu lingkungan $N(x^*, \delta)$ dimana $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga $f(x) > f(x^*)$ untuk semua $x \in N(x^*, \delta)$.

Karena $f(x) > f(x^*)$ akibatnya $P(x, x^*) = -\|x - x^*\| < 0 = P(x^*, x^*)$ sehingga terbukti bahwa x^* merupakan titik maksimum global dari $P(x, x^*)$.

Teorema 2

Jika $x \ne x^*$ dan memenuhi $f(x) \ge f(x^*)$ maka $\nabla P(x, x^*) \ne 0$

<u>Bukti</u>

Karena $f(x) \ge f(x^*)$ maka $P(x, x^*) = -\|x - x^*\|$, akibatnya

$$\nabla P(x, x^*) = -\frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \ne 0 .$$

Dalam algoritma fungsi pengisian, $P(x, x^*)$ diminimumkan untuk mendapatkan titik x' dimana $f(x') \le f(x^*)$. Proses meminimumkan $P(x, x^*)$ tidak akan berhenti jika $f(x)$ tidak lebih kecil daripada $f(x^*)$. Teorema 3.2 menunjukkan bahwa ketika $f(x) \ge f(x^*)$, $P(x, x^*)$ tidak memiliki titik stasioner.

Teorema 3

Jika x^* bukan minimum global $f(x)$ dan x_1^* titik minimum lokal $f(x)$ sedemikian rupa sehingga $f(x_1^*) < f(x^*)$, maka akan ada titik x' yang meminimumkan $P(x,x^*)$ dalam garis yang melalui x^* dan x_1^* untuk setiap lingkungan dari x_1^*.

Bukti

x^* merupakan titik minimum lokal $f(x)$, maka akan ada lingkungan $N(x^*,\sigma^*)$ dimana $\sigma^* > 0$ sedemikian rupa sehingga $f(x) \geq f(x^*)$ untuk $x \in N(x^*,\sigma^*)$.

Akibatnya $P(x,x^*) = -\left\|x - x^*\right\| < 0$ untuk semua $x \in N(x^*,\sigma^*)$ tapi $x \neq x^*$.

Demikian pula halnya dengan x_1^*, akan ada lingkungan $N(x_1^*,\sigma_1^*)$ sedemikian rupa sehingga $f(x^*) > f(x') \geq f(x_1^*)$ untuk setiap $x' \in N(x_1^*,\sigma_1^*)$.

Hal ini juga berlaku $P(x',x^*) = -\eta(f(x') - f(x^*))\left\|x - x^*\right\| = \left\|x - x^*\right\| > 0$ untuk $x' \in N(x_1^*,\sigma_1^*)$. Juga diketahui bahwa ada sebuah trajectory $P(x,x^*)$ dalam segmen garis yang menghubungkan x^* dan x'.

Di titik x^* nilai $P(x^*,x^*) = 0$, ketika x menjauh dari x^* dengan menggunakan metode Hooke and Jeeves (metode ini tidak diberikan dalam makalah ini karena telah banyak diberikan dalam berbagai literatur) maka nilai $P(x,x^*) < 0$. Pada saat x mendekati x_1^* maka $P(x,x^*) > 0$. Jadi $P(x,x^*)$ turun ketika $f(x) \geq f(x^*)$ dan kemudian naik ketika $f(x) < f(x^*)$.

IV. ALGORITMA FUNGSI BANTU NONPARAMETRIK BARU

Untuk menguji apakah fungsi bantu nonparametrik yang diberikan dalam penelitian ini benar dapat digunakan untuk mencari nilai minimum global maka dibangun sebuah algoritma. Algoritma terdiri dari dua tahap utama. Tahap pertama adalah meminimumkan fungsi objektif yang diberikan dengan menggunakan metode-metode untuk meminimumkan sebuah fungsi. Sedangkan tahap kedua yaitu proses meminimumkan fungsi bantu dan menggunakan titik minimum fungsi bantu yang didapatkan dalam tahap kedua sebagai titik awal meminimumkan fungsi objektif untuk mencari nilai minimum yang lebih kecil.

Algoritma yang berhasil dibangun adalah sebagai berikut:

I. Step awal. Misalkan *n* adalah jumlah variabel

1) Pilih $\delta = 0.1$, k = 1
2) Pilih arah $e_i (i = 1, 2, ... m)$ dimana $m = 2n$ (arah positif dan negatif)
3) Pilih titik awal $x_0 \in X$

II. Step Utama

1) Minimumkan $f(x)$ dengan titik awal x_0, dalam penelitian ini digunakan Metode Hooke and Jeeves. Dalam tahap ini akan didapatkan titik minimum lokal x_k^*
2) Jika $i > m$ maka algoritma berhenti, dan kesimpulannya x_0 adalah titik minimum global
3) Ambil $x_0 = x_k^* + e_i$
4) Bangun Fungsi Pengisian Nonparametrik $P(x,x^*) = -\eta(f(x) - f(x^*))\left\|x - x^*\right\|$, dimana $\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{jika } t > 0 \\ -1, & \text{jika } t \leq 0 \end{cases}$
5) Minimumkan $P(x,x^*)$ dengan titik awal x_0. Dalam tahap ini akan didapatkan titik x' yang merupakan titik minimum $P(x,x^*)$
6) Jika
   a. $f(x') \leq f(x_k^*)$, maka tetapkan k = k+1, $x_k^* = x'$ dan kembali ke step 1
   b. Jika x' keluar dari domain X, maka $i = i + 1$ dan kembali ke step 2, selainnya kembali ke step 5.

Algoritma ini akan konvergen kepada satu nilai minimum global dari fungsi objektif. Metode untuk meminimumkan $f(x)$ dan $P(x,x^*)$ menggunakan Metode Hooke and Jeeves, dimana penggunaan metode ini tidak melibatkan turunan fungsi sehingga upaya komputasi akan cenderung lebih kecil.

V. HASIL NUMERIK

Algoritma yang telah dibuat dalam bab sebelumnya kemudian diimplementasikan ke dalam bentuk program komputer. Bahasa pemrograman yang digunakan dalam penelitian ini adalah bahasa C++. Contoh fungsi diambil dari [25].

Fungsi-fungsi yang digunakan untuk menguji efektifitas fungsi pengisian yang diberikan dalam penelitian ini adalah:

Contoh 5.1 :

$$f(x)=\sin(x)+\sin\left(\frac{2}{3}x\right),\ x\in[3,20]$$

Contoh 5.2 :

$$f(x)=\cos\left(\frac{3}{5}x\right)\cos(2x)+\sin(x),$$
$$x\in[0.5,12]$$

Contoh 5.3 :

$$f(x)=\cos\left(\frac{2}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{10}x\right)+\cos(x),$$
$$x\in[-18.5,12]$$

Contoh 5.4 :

$$f(x)=\sin\left(\frac{4}{9}x\right)\sin(x),\ x\in[-10,10]$$

Contoh 5.5 :

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{3}\sin(2x),\ x\in[1,22]$$

Contoh 5.6 :

$$f(x)=\sin(2x)\sin(x)+\sin\left(\frac{2}{3}x\right),$$
$$x\in[1.5,20]$$

Contoh 5.7 :

$$f(x)=-\sum_{i=1}^{5} i\cos\{(i+1)x+i\},$$
$$x\in[-10,10]$$

Contoh 5.8 :

$$f(x)=\sin(x)+\sin\left(\frac{10}{3}x\right)+\ln(x)-0.84x+3,$$
$$x\in[2.7,30]$$

Contoh 5.9 :

$$f(x)=\cos(x)+\frac{10}{3}\cos\left(\frac{10}{3}x\right)+\frac{1}{x}-0.84,$$
$$x\in[2,20.5]$$

Contoh 5.10:

$$f(x)=-\sum_{i=1}^{5} i\ \sin((i+1)x+i),\ x\in[-10,10]$$

Contoh 5.11:

$$f(x)=\sin(x)+\sin\left(\frac{10}{3}x\right)+\ln(x)-0.84x,$$
$$x\in[2.7,39]$$

Contoh 5.12:

$$f(x)=-\sum_{i=1}^{5}\sin((i+1)x+i),\ x\in[-10,10]$$

Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 5.1 hingga Tabel 5.12 dimana simbol yang digunakan dalam tabel adalah sebagai berikut:

x_0 = titik awal

x_k^* = titik minimum

$f(x_k^*)$ = nilai minimum

x' = titik minimum fungsi pengisian

$f(x')$ = nilai fungsi pengisian

TABEL 5.1 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.1

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	3	5.36	-1.22	15.99	-1.22
2		17.04	-1.91		

TABEL 5.2 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.2

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	0.5	1.34	0.35	2.73	0.35
2		3.69	-0.80	5.57	-0.80
3		5.95	-1.04	10.33	-1.04
4		10.96	-1.95		

TABEL 5.3 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.3

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	-18.5	-15.71	-2.00		

TABEL 5.4 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.4

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	-10	-8.42	-0.48	-5.47	-0.48
2		-4.51	-0.89		

TABEL 5.5 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.5

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	1	2.56	-0.72		

TABEL 5.6 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.6

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	1.5	2.17	0.22	3.66	0.22
2		4.23	-0.41	5.88	-0.41
3		6.36	-0.88	7.86	-0.88
4		8.36	-1.39	16.21	-1.39
5		16.65	-1.76		

TABEL 5.7 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.7

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	-9.6	-9.29	-3.61	-8.45	-3.61
2		-8.29	-6.17	-7.31	-6.17
3		-7.08	-14.51		

TABEL 5.8 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.8

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	2.7	3.44	0.16	4.56	0.16
2		5.20	-1.60	8.57	-1.60
3		9.11	-3.00	10.09	-3.00
4		10.91	-5.74	12.48	-5.74
5		12.70	-5.99	14.33	-5.99
6		14.73	-6.77	15.76	-6.77
7		16.62	-9.85	17.88	-9.85
8		18.37	-10.98	20.21	-10.98
9		20.32	-11.04	21.52	-11.04
10		22.31	-13.81	23.35	-13.81
11		24.06	-15.90	27.35	-15.90
12		27.97	-17.71		

TABEL 5.9 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.9

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	2.34	2.84	-4.77	15.89	-4.77
2		16.01	-5.06		

TABEL 5.10 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.10

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	-9.3	-9.04	-3.73	-8.24	-3.73
2		-8.01	-9.49	-6.90	-9.49
3		-6.77	-12.03		

Tabel 5.11 : Hasil Numerik untuk Contoh 5.11

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	2.7	3.44	-2.84	4.57	-2.84
2		5.20	-4.60	8.57	-4.60
3		9.11	-6.00	10.10	-6.00
4		10.91	-8.74	12.48	-8.74
5		12.70	-8.99	14.33	-8.99
6		14.73	-9.77	15.76	-9.77
7		16.62	-12.85	17.88	12.85
9		22.31	-16.81	23.35	-16.81
10		24.06	-18.90	27.34	-18.90
11		27.97	-20.71	28.92	-20.71
12		29.38	-23.57	31.30	-23.57
13		31.56	-23.91	33.16	-23.91
14		33.59	-24.78	34.60	-24.78
15		35.47	-27.92	36.71	-27.93
16		37.22	-29.11		

TABEL 5.12 : HASIL NUMERIK UNTUK CONTOH 5.12

k	x_0	x_k^*	$f(x_k^*)$	x'	$f(x')$
1	-9.3	-9.02	-1.22	-8.28	-1.21
2		-8.08	-2.03	-6.91	-2.03
3		-6.72	-3.37		

VI. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah diberikan sebuah fungsi pengisian nonparametrik untuk menyelesaikan persoalan optimasi global. Fungsi tersebut telah terbukti merupakan fungsi pengisian yang dibuktikan melalui tiga teorema. Untuk memperlihatkan efektifitas fungsi pengisian tersebut telah dibuat algoritma dan mengujinya melalui beberapa contoh benchmark dan dari semua contoh yang diberikan ternyata fungsi pengisian nonparametrik yang diberikan dalam penelitian ini mampu mencari nilai minimum global.

DAFTAR PUSTAKA

[1] P. Snaselova dan F. Zboril, “Genetic algorithm using theory of chaos,” Procedia Computer Science, vol. 51, pp. 316 - 325, 2015.

[2] M. Anusha dan J. G. R. Sathiaseelan, “Feature selection using K-Means genetic algorithm for multi-objective optimization,” Procedia Computer Science, vol. 57, pp. 1074 - 1080, 2015.

[3] L. R. Rere, M. I. Fanany dan A. M. Arymurthy, “Simulated annelaing algorithm for deep learning,” Procedia Computer Science, vol. 72, pp. 137 - 144, 2015.

[4] B. Peng, Z. Lu dan T. Cheng, “A tabu search/path relinking algorithm to solve the job shop scheduling problem,” Computers & Operations Research, vol. 53, pp. 154 - 164, 2015.

[5] R. Chelouah dan P. Siarry, “Tabu search applied to global optimization,” European Journal of Operational Research, vol. 123, pp. 256 - 270, 2000.

[6] A. M. Geoffirion, Lagrangian Relaxation for Integer Programming, 50 Years of Integer Programming, 1958 - 2008, New York: Springer, 2010.

[7] C. F. Wang, Y. Q. Bai dan P. P. Shen, “A practicable branch-and-bound algorithm for globally solving linear multiplicative programming,” Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 2017.

[8] R. Kamyar dan M. M. Peet, “Multi-objective dynamic programming for constrained optimization of non-separable objective function with application in energy storage,” dalam IEEE 55th Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2016.

[9] Y. J. Yang, M. L. He dan Y. L. Gao, “Discrete global optimization problems with a modified discrete filled function,” Journal of the Operations Research Society of China, 2015.

[10] L. Y. Yuan, Z. P. Wan, Q. H. Tang dan Y. Zheng, "A class of parameter-free filled functions for box-constrained system of nonlinear equations," Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, vol. 32, no. 2, pp. 355 - 364, 2016.

[11] R. Gee, "A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables," Mathematical Programming, vol. 46, pp. 191 - 204, 1990.

[12] R. Gee dan Y. Qin, "A class of filled functions for finding global minimizers of a function of several variables," Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 54, pp. 241 - 252, 1987.

[13] Y. Lin, Y. Yang dan L. Zhang, "A novel filled function method for global optimization," Journal of Korean Mathematical Society, vol. 47, pp. 1253 - 1267, 2010.

[14] A.-f. Ling dan C.-x. Xu, "A new discrete filled function method for solving large scale max-cut problems," Numerical Algorithms, vol. 60, pp. 435 - 461, 2012.

[15] Z. wan, L. Yuan dan J. Chen, "A filled function method for nonlinear systems of equalities and iequalities," Computational & Applied Mathematics, vol. 31, no. 2, pp. 391 - 405, 2012.

[16] Y. L. Shang, W. X. Wang dan Q. B. Sun, "A class of generalized filled functions for unconstrained global optimization," Applied Mathematics E-Notes, vol. 7, pp. 147 - 153, 2007.

[17] C. Wang, Y. Yang dan J. Li, "A new filled function method for unconstrained global optimization," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 225, pp. 68 - 79, 2009.

[18] W. Zhu dan M. Ali, "Solving nonlinearly constrained global optimization problem via an auxiliary function method," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 230, pp. 491 - 503, 2009.

[19] H. Lin, Y. Wang dan L. Fan, "A filled function method with one parameter for unconstrained global optimization," Applied Mathematics and Computation, vol. 218, pp. 3776 - 3785, 2011.

[20] H. Lin, Y. Wang, X. wang dan Y. Gao, "A new filled function method for global optimization with box constraint," Journal of Information & Computational Science, vol. 9, no. 10, pp. 2843 - 2853, 2012.

[21] S. Ma, Y. Yang dan H. Liu, "A parameter free filled function for unconstrained global optimization," Applied Mathematics and Computation, vol. 215, pp. 3610 - 3619, 2010.

[22] Y. Shang, P. Li dan H. Xie, "A new parameter-free filled function for unconstrained global optimization," dalam Third International Joint Conference on Computational Science and Optimization, Huangshan, China, 2010.

[23] Q. Wu dan L. Yuan, "A smooth clustering algorithm based on parameter free filled function," Advanced Materials Research, vol. 143, pp. 389 - 393, 2011.

[24] Q. Wu dan L. Yuan, "A new filled function method for smooth clustering," Journal of Computers, vol. 7, no. 2, pp. 491 - 498, 2012.

[25] G. K. Wen, M. B. Mamat, I. B. Mohd dan Y. B. Dasril, "Global Optimization with Nonparametric Filled Function," Far East Journal of Mathematical Sciences, vol. 61, pp. 51 - 64, 2012.